Лекция 9. Оқшауланған ерекше нүктелер

Жоспар:

1. Функцияның нөлдері
2. Оқшауланған ерекше нүктелер
3. Мысалдар

Анықтама. Егер z_0 нүктесінде аналитикалық $f(z)$ функциясы үшін

$$f(z_0)=0,\ \ f'(z_0)=0,...,\ f^{(n-1)}(z_0)=0,\ \ f^{(n)}(z_0)\neq 0$$

шарттары орындалса, онда z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының *n – ретті* (немесе еселік) *нөлі* деп аталады.

$n=1$ болса, z_0 нүктесі *жай нөл* деп аталады.

Теорема. z_0 нүктесі $f(z)$ функциясының $n-$ ретті нөлі болуы үшін, осы нүктенің аймағында

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$$

теңдігінің орындалуы *қажетті және жеткілікті*, мұнда $f(z)$, $\varphi(z)$ функциялары z_0 нүктесінде аналитикалық және $\varphi(z_0)\neq 0$.

1-мысал. $f(z)=1-\sin z$ функциясының нөлдерін тауып, реттерін анықтаңыз.

Шешуі. $f(z)$ функциясын нөлге теңестіріп $\sin z=1$ теңдігін аламыз. $z_n=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi,\ (n=0,\pm 1,\pm 2,...)$ – берілген функцияның нөлдері. Берілген функцияның туындыларын табайық.

$$f'(x)=-\cos z,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=0$$

$$f''(x)=\sin z,\quad f''\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=1\neq 0$$

Демек, $z_n=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ (n=0,\pm 1,\pm 2,...)$ берілген функцияның екінші ретті нөлдері.

2-мысал. $f(z)=(z^2+4)^3\cdot\cos z$ функциясының нөлдерін тауып, реттерін анықтаңыз.

Шешуі. $(z^2+4)^3\cos z=0$ теңдеуінен $z^2+4=0$ немесе $\cos z=0$ теңдеулерін аламыз. Бұл теңдеулердің шешімі:

$$z=2i,\ \ z=-2i,\ \ z=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ (n=0,\pm 1,\pm 2,...)$$

Егер $z=2i$ болса, онда $f(z)=(z-2i)^3\varphi(z)$ түрінде жазуға болады, мұнда $\varphi(z)=(z+2i)^3\cos z$ функциясы $z=2i$ нүктесінде аналитикалық және

$$\varphi(2i)=-64i\cos 2i=-64ich2\neq 0$$

Демек, $z=2i$ нүктесі үшінші ретті нөл. $z=-2i$ нүктесі де үшінші ретті нөл екенін тура осылай көрсетуге болады.

$z=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ (n=0,\pm 1,\pm 2,...)$ нүктесін зерттейік. Берілген функцияның туындысын табайық.

$$f'(z)=3(z^2+4)^2\cdot 2z\cos z-(z^2+4)^3\sin z$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=-\left(\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2+4\right)^3\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\neq 0$$

Олай болса, $z=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ (n=0,\pm 1,\pm 2,...)$ нүктелері бірінші ретті нөлдер.

3-мысал. $f(z)=\dfrac{z^7}{z-\sin z}$ функциясының нөлі болатын $z_0=0$ нүктесінің ретін анықтаңыз.

Шешуі. $\sin z$ функциясының Тейлор қатарына жіктелуін қолданамыз.

$$f(z)=\frac{z^7}{z-\sin z}=\frac{z^7}{z-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}=$$

$$=\frac{z^7}{z-\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\ldots\right)}=$$

$$=\frac{z^7}{\dfrac{z^3}{3!}-\dfrac{z^5}{5!}+\dfrac{z^7}{7!}-\ldots}=\frac{z^4}{\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z^2}{5!}+\dfrac{z^4}{7!}-\ldots}=$$

$$z^4\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z^2}{5!}+\dfrac{z^4}{7!}-\ldots}=z^4\cdot\varphi(z)$$

мұнда $\varphi(z)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3!}-\dfrac{z^2}{5!}+\dfrac{z^4}{7!}-\ldots}$,

$\varphi(z)$ функциясы $z_0=0$ нүктесінде аналитикалық және $\varphi(0)=6\neq 0$. Демек, $z_0=0$ нүктесі берілген функция үшін төртінші ретті нөл болады.

Анықтама. Егер $f(z)$ функциясы $0<|z-a|<\rho$ сақинасында аналитикалық, бірақ a $(a\neq\infty)$ нүктесінде анықталмаған болса, онда a нүктесі $f(z)$ функциясы үшін *оқшауланған ерекше нүкте* деп аталады.

Анықтама. a нүктесі $f(z)$ функциясы үшін оқшауланған ерекше нүкте болсын. Егер

а) $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ бар және ақырлы болса, онда a нүктесі *жөнделетін* ерекше нүкте,

б) $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$ болса, онда a нүктесі *полюс*,

в) $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ табылмаса, онда a нүктесі *маңызды* ерекше нүкте деп аталады.

4-мысал. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ функциясы үшін $z=0$ нүктесі жөнделетін ерекше нүкте, себебі

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots}{z}=1$$

5-мысал. $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$ функциясы үшін $z=-1$ нүктесі полюс болады, себебі

$$\lim_{z\to -1}\frac{z}{z+1}=\infty$$

6-мысал. $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$ функциясы үшін $z=0$ нүктесі маңызды ерекше нүкте болады, себебі $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z^2}}$ – шегі табылмайды.

Шынында, егер $z = x$ болса, онда

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$$

ал егер $z = iy$ болса, онда

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{y\to 0} e^{-\frac{1}{y^2}} = 0$$

1) Жөнделетін ерекше нүкте.

Теорема. Оқшауланған ерекше a нүктесі $f(z)$ функциясы үшін жөнделетін ерекше нүкте болуы үшін $f(z)$ функциясының Лоран қатарына жіктелуінің бас бөлігі нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті.

2) Полюс.

Теорема 1. $a \neq \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болуы үшін, $f(z)$ функциясының мына түрде берілуі:

$$f(z) = (z-a)^{-m} \cdot \varphi(z), \quad \varphi(a) \neq 0,$$

қажетті және жеткілікті, мұнда $\varphi(z)$ – a нүктесінде аналитикалық функция, $m \geq 1$ – бүтін сан, m – полюстің реті.

Теорема 2. $a \neq \infty$ нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болуы үшін, бұл нүкте $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ функциясының нөлі болуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 3. Оқшауланған ерекше a нүктесі $f(z)$ функциясының полюсі болуы үшін осы функцияның Лоран қатарына жіктелуінің бас бөлігі ақырлы мүшелерден тұруы қажетті және жеткілікті.

3) Маңызды ерекше нүкте.

Теорема. Оқшауланған ерекше a нүктесі $f(z)$ функциясының маңызды ерекше нүктесі болуы үшін a нүктесінің аймағында Лоран қатарының бас бөлігі шексіз көп мүшелерден тұруы қажетті және жеткілікті.

7-мысал. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4 + z^3 - z^2 - z}$ функциясының ерекше нүктелерін тауып, түрін анықтаңыз.

Шешуі. Берілген функцияны түрлендірейік.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(z^3 + z^2 - z - 1)} = \frac{\sin z}{z(z^2(z+1) - (z+1))} = \frac{\sin z}{z(z+1)^2(z-1)}$$

Олай болса, ерекше нүктелер $z = 0,\ z = 1,\ z = -1$. Алдымен $z = 0$ нүктесін зерттейік.

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z(z+1)^2(z-1)} = -1$$

Демек, $z = 0$ нүктесі жөнделетін ерекше нүкте. $z = 1$ нүктесінде $f(z)$ функциясын келесі түрде жазуға болады:

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{z(z+1)^2}}{z-1}=\frac{\varphi(z)}{z-1},$$

мұнда $\varphi(z)=\frac{\sin z}{z(z+1)^2}$, $\varphi(z)$ функциясы $z=1$ нүктесінде аналитикалық және $\varphi(1)=\frac{\sin 1}{4}\neq 0$. Олай болса, $z=1$ нүктесі жай полюс болады. Енді $z=-1$ нүктесін қарастырайық. Жоғарыдағы сияқты $f(z)$ функциясын түрлендірейік.

$$f(z)=\frac{\frac{\sin z}{z(z-1)}}{(z+1)^2}=\frac{\varphi(z)}{(z+1)^2},$$

мұнда $\varphi(z)=\frac{\sin z}{z(z-1)}$, $\varphi(z)$ функциясы $z=-1$ нүктесінде аналитикалық және $\varphi(-1)=-\frac{\sin 1}{2}\neq 0$. Демек, $z=-1$ нүктесі екінші ретті полюс болады.

8-мысал. $f(z)=\frac{4}{3shz-z^3-3z}$ функциясы үшін $z=0$ ерекше нүктесінің түрін анықтаңыз.

Шешуі. $z=0$ нүктесі берілген функция үшін полюс болады, себебі бөлшектің бөлімінде тұрған функцияның нөлі болып табылады. Енді $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{3shz-z^3-3z}{4}$ функциясын қарастырайық. $\varphi(0)=0$. Ретін анықтайық.

$$\varphi'(z)=3chz-3z^2-3,\quad \varphi'(0)=0$$
$$\varphi''(z)=3shz-6z,\quad \varphi''(0)=0$$
$$\varphi'''(z)=3chz-6,\quad \varphi'''(0)=-3\neq 0$$

Олай болса, $z=0$ нүктесі $\varphi(z)$ функциясының үшінші ретті нөлі, демек, $f(z)$ функциясының үшінші ретті полюсі болады.

9-мысал. $f(z)=\frac{e^{\frac{2}{z}}\cdot\sin\left(\frac{\pi i}{2}z\right)}{(z^2+iz+2)(z^4+1)^2}$ функциясының ерекше нүктелерін тауып, түрін анықтаңыз.

Шешуі. Бөлшектің бөліміндегі функциялардың нөлдері берілген функцияның ерекше нүктелері болады.

$$z^2-iz+2=0\ \Rightarrow\ z=i,\ z=-2i$$

$$z^4+1=0\ \Rightarrow\ z^4=-1\ \Rightarrow\ z_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},\ (k=0,1,2,3)$$

немесе

$$z_k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ал $z=0$ нүктесі маңызды ерекше нүкте болады, себебі $\lim_{z\to 0}e^{\frac{2}{z}}$ табылмайды (6-мысалды қараңыз).

Егер берілген функцияны келесі түрде жазсақ

$$f(z)=\frac{e^{\frac{2}{z}}\sin\left(\frac{\pi i}{2}z\right)}{(z-i)(z+2i)(z-z_0)^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2}$$

мұнда $z_k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ k=0,1,2,3,$ онда $z=i$ нүктесінің жай полюс, ал $z=z_k$ нүктелерінің екінші ретті полюс екенін байқау қиын емес. $z=-2i$ нүктесі жөнделетін ерекше нүкте, себебі

$$\lim_{z\to-2i}\frac{\sin\left(\frac{\pi i}{2}z\right)}{z+2i}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to-2i}\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi i}{2}z\right)}{z+2i}=$$

$$=\lim_{z\to-2i}\frac{\sin\frac{\pi i}{2}\left(\frac{2}{i}-z\right)}{z+2i}=\lim_{z\to-2i}\frac{-\sin\frac{\pi i}{2}(2i+z)}{z+2i}=-\frac{\pi i}{2}.$$

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Төлегенова М. Б., Қойлышев У.Қ. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және Амалдық есептеу. Оқу құралы. Қазақ ун-ті, 2021. Қазақша, орысша, ағылшынша.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991 (предыдущие издания 1965, 1967).
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985. (Предыдущие издания: 1968, 1976).
4. Сборник задач по теории аналитических функций. Под ред. М.А. Евграфова. Изд. 2-е доп. М.: Наука,1972.
5. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.